2°) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

on a $I_n = \int_0^1 t^n \cos(t)\ dt$

$\forall\ t \in [0,1] \Rightarrow \cos(t) \leq 1$

on a $t^n \geqslant 0$

$\Rightarrow t^n \cos(t) \leq t^n$

les fonctions $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto t^n \cos(t)$ sont continues sur $[0,1]$

donc $\int_0^1 t^n \cos(t)\ dt \leq \int_0^1 t^n\ dt$

$I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1$

donc

$I_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1}$

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{I_n \leq \frac{1}{n+1}}$$